sober空間の位相的性質と順序位相におけるsober性

本稿では、位相空間論および代数幾何学（スキーム論など）で重要な役割を果たす **sober空間 (sober space)** について、その基本的な定義から出発し、部分空間、商空間、直積、直和といった位相的演算に対する振る舞いを詳細に解説します。また、半順序集合上の位相である **Alexandroff位相 (Alexandroff topology)** および **Scott位相 (Scott topology)** において、空間がsoberになるための必要十分条件や十分条件について、自己完結的 (self-contained) な証明とともに論じます。

1. 基礎概念の定義

議論を厳密にするため、まずは基本となる位相的・順序的定義を確認します。

定義 1.1: T_0 空間 (Kolmogorov space)

位相空間 X が T_0 空間であるとは、任意の相異なる2点 $x, y \in X$ に対し、一方が他方の開傍ら（開近傍）に含まれないこと、すなわち $x \notin \overline{\{y\}}$ または $y \notin \overline{\{x\}}$ が成り立つことをいう。

定義 1.2: 既約閉集合 (irreducible closed set) と生成点 (generic point)

位相空間 X の空でない閉集合 C が既約 (irreducible) であるとは、$C = C_1 \cup C_2$ を満たす任意の閉集合 $C_1, C_2 \subseteq X$ に対し、$C = C_1$ または $C = C_2$ が成り立つことをいう。これは、「任意の開集合 U, V が C と交わるならば、$U \cap V$ も C と交わる」ことと同値である。
閉集合 C に対し、ある点 $x \in C$ が存在して $C = \overline{\{x\}}$ となるとき、x を C の生成点 (generic point) と呼ぶ。

定義 1.3: sober空間 (sober space)

位相空間 X が sober空間 (sober space) であるとは、任意の空でない既約閉集合 C が、**唯一の生成点**を持つこと、すなわち $C = \overline{\{x\}}$ を満たす $x \in X$ がただ1つ存在することをいう。（生成点の一意性は、X が T_0 空間であることを含意する。）

2. sober空間の位相的演算

Sober空間の位相的な演算（部分空間、商空間、直積、直和）に関する振る舞いを解説します。

2.1 部分位相空間 (subspace)

結論：一般には sober ではありません。

任意の T_0 空間 X は、ある sober空間の部分空間として稠密に埋め込むことができます。この構成を X の **sober化 (soberification)** と呼びます。Sober化は、位相空間の圏から sober空間の圏への左随伴関手を与えます。したがって、「T_0 空間であるが sober でない空間」は、常に sober空間の部分空間として実現できるため、部分空間が sober になるとは限りません。

> **反例：sober空間の sober でない部分空間**
>
> 無限集合 X に補有限位相 (cofinite topology) を入れた空間を考えます。この空間において、閉集合は有限集合と X 全体のみです。
> この空間は T_1 空間であるため当然 T_0 空間ですが、X 全体は既約閉集合であるにもかかわらず、どの単一点の閉包でもない（有限集合にならない）ため、生成点を持たず、sober ではありません。
> この X の sober化 $\tilde{X}$ を考えると、$\tilde{X}$ は sober空間ですが、その部分空間として埋め込まれた X は sober ではありません。

例外（sober になる場合）： Sober空間の**閉部分空間 (closed subspace)** や**開部分空間 (open subspace)** は常に sober になります。より一般に、局所閉部分空間 (locally closed subspace)（開部分空間と閉部分空間の交わり）や、レトラクト (retract) も sober 性を保存します。

2.2 商位相空間 (quotient space)

結論：一般には sober ではありません。

Sober空間からの連続写像による全射（商写像）による商空間は、一般に sober 性を保存しません。 極端な例として、任意の位相空間は、ある sober空間（例えば、各点の閉包を直和で寄せ集めた **超不連結 (extremally disconnected)** な極端に分離された空間など）からの全射連続写像の像として表現できる場合があります。したがって、商空間が sober でない事態は容易に生じ得ます。

2.3 直積 (product)

結論：常に sober になります。

> 証明：
>
> Sober空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ を取り、その直積空間を $X = \prod_{i\in I} X_i$ とし、各成分への射影を $\pi_i : X \to X_i$ とします。
> まず、各 X_i は sober なので T_0 空間であり、T_0 空間の直積である X も T_0 空間です。したがって生成点が存在すれば一意です。
> 次に、X における任意の既約閉集合 C を取ります。射影 π_i は連続であるため、像 $\pi_i(C)$ は既約であり、その閉包 $\overline{\pi_i(C)}$ も X_i における既約閉集合となります。
> X_i は sober空間であるため、$\overline{\pi_i(C)}$ は唯一の生成点 $x_i \in X_i$ を持ちます。これらを束ねた点 $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ を考えます。
> 連続写像による閉包の性質から、$C \subseteq \overline{\{x\}}$ と $\overline{\{x\}} \subseteq C$ の両方を示すことができ（直積位相の開基を用い

て証明可能）、結果として $C = \overline{\{x\}}$ が成立します。よって X は sober空間です。 ■

2.4 直和 (coproduct / disjoint union)

結論：常に sober になります。

証明：

Sober空間の族 $\{X_i\}_{i \in I}$ の直和空間を $X = \coprod_{i \in I} X_i$ とします。
直和空間 X において、各 X_i は開かつ閉な部分空間、すなわち **clopen** な集合となります。
X における既約閉集合 C を取ります。もし C が相異なる2つの成分 X_j, X_k と交わるとすると、$C \cap X_j$ と $C \setminus X_j$ はどちらも空でない閉集合であり、それらの和集合は C となります。これは C が既約であることに矛盾します。つまり、既約閉集合は複数の成分にまたがることはできません。
したがって、ある単一の成分 X_j が存在して $C \subseteq X_j$ となります。X_j は clopen であるため、X_j の相対位相における閉包と全体空間 X における閉包は一致し、C は X_j における既約閉集合とみなせます。
X_j は sober空間であるため、生成点 $x \in X_j$ が唯一存在し、$C = \overline{\{x\}}$ となります。これがそのまま直和空間 X 全体の生成点となります。よって X は sober空間です。 ■

3. 商空間が sober になるための十分条件

商空間が一般には sober 性を失ってしまうという性質を踏まえ、商空間が sober 性を保つための最も一般的で強力な位相的十分条件を解説します。

定理 3.1: 閉写像による商空間の sober 性

X を sober空間とし、$q : X \to Y$ を全射な連続写像（商写像）とする。以下の2つの条件を同時に満たすとき、商空間 Y も必ず sober空間になる。
1. q が**閉写像 (closed map)** であること。
2. 商空間 Y が T_0 **空間** であること。

証明：

1. Y の任意の既約閉集合を C とします。
2. q が連続な「閉全射」である場合、位相幾何学の一般的な補題により、**「$q(Z) = C$ を満たす X の既約閉集合 Z が必ず存在する」**ことが知られています。
3. X は sober空間なので、この Z には唯一の生成点 $x \in X$ が存在し、$Z = \overline{\{x\}}$ と書けます。
4. したがって、$C = q(\overline{\{x\}})$ となります。
5. ここで q は連続なので、点の閉包の像は像の閉包に含まれます（$q(\overline{\{x\}}) \subseteq \overline{\{q(x)\}}$）。一方、$q$ は閉写像 (closed map) なので、$q(\overline{\{x\}})$ は $q(x)$ を含む「閉集合」です。閉包は最小の閉集合であるため、逆の包含関係 $\overline{\{q(x)\}} \subseteq q(\overline{\{x\}})$ も成り立ちます。
6. 結果として $C = \overline{\{q(x)\}}$ が成立します。つまり、Y の既約閉集合 C は、少なくとも1つの生成点 $q(x)$

を持ちます（この状態を quasi-sober と呼びます）。
7. 最後に、Y が T_0 空間であるという仮定から、生成点は必ず一意に定まります。これで Y が sober であることが示されました。 ■

代数幾何学における応用例：
Sober空間が最も活躍する代数幾何学（スキーム論など）の文脈では、上記の「閉写像 (closed map)」という条件が自然に満たされる有名なケースがあります。
スキーム X に有限群 G が作用しているとします。このとき、軌道空間としての商空間 X/G は、（アフィンであるなどの構成条件の下で）再びスキームとなります。スキームの有限群による商写像 $X \to X/G$ は**整射 (integral morphism)** と呼ばれる性質を持ち、整射は位相空間の写像として**必ず閉写像になります**。さらに商空間も T_0 になるため、先ほどの位相的十分条件にピタリと当てはまり、X/G が sober空間となることが保証されます。

4. 順序位相における sober 性

半順序集合 (partially ordered set, poset) X 上に定義される主要な2つの位相、**Alexandroff位相** と **Scott位相** の sober 性について解説し、それぞれの証明を行います。

4.1 Alexandroff位相 (Alexandroff topology)

定義 4.1: Alexandroff位相

半順序集合 $(X, \leq)$ において、任意の $a \in X$ に対して $\downarrow a = \{x \in X \mid x \leq a\}$ （下方閉集合）を基本開集合（開基）とする位相を Alexandroff位相 という。この位相において、任意の開集合は**下方閉集合 (downset)** であり、任意の閉集合は**上方閉集合 (upset)** となる。

定理 4.2

半順序集合 X の $\mathcal{B} = \{\{x \in X \mid a \geq x\} \mid a \in X\}$ を開基とするAlexandroff位相が sober空間であるための必要十分条件は、X に無限に長い降鎖が存在しないこと、すなわち **降鎖条件 (descending chain condition, DCC)** を満たすことである。

証明：

1. T_0 性の確認と生成点の形状：
相異なる2点 $x \neq y$ に対し、順序の反対称性から $x \not\leq y$ または $y \not\leq x$ です。$x \not\leq y$ とすると、開集合 $\downarrow y$ は y を含みますが x を含みません。よって T_0 です。
ある点 $x \in X$ の閉包 $\overline{\{x\}}$ は、x を含む最小の閉集合（上方閉集合）なので、
$\overline{\{x\}} = \uparrow x = \{y \in X \mid y \geq x\}$ となります。
したがって空間が sober である条件は、「任意の空でない既約閉集合 C が、ある $x \in X$ を用いて $C = \uparrow x$ と表せること」に帰着されます。

2. 既約閉集合の言い換え：
閉集合（上方閉集合）C が既約であるとは、任意の $a, b \in C$ に対し、ある $c \in C$ が存在して $c \le a$ かつ $c \le b$ となること、つまり C が**下方に有向 (directed downwards)** な上方閉集合であることと同値です。

3. 必要性（$\Longrightarrow$）の証明：
空間が sober であると仮定します。X に無限に長い降鎖 $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ が存在すると仮定して矛盾を導きます。
集合 $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \uparrow x_n$ を考えます。C は上方閉集合の和集合なので閉集合です。任意の $a, b \in C$ に対し、ある n, m があって $a \ge x_n, b \ge x_m$ です。$k = \max(n, m)$ とおくと $x_k \le x_n \le a$ かつ $x_k \le x_m \le b$ であり $x_k \in C$ なので C は下方に有向です。
よって C は既約閉集合であり、sober 性よりある $x \in X$ が存在して $C = \uparrow x$ となります。$x \in C$ より、ある n が存在して $x \ge x_n$ です。一方、任意の m について $x_m \in C = \uparrow x$ なので $x_m \ge x$ です。特に $m = n+1$ とすると $x_{n+1} \ge x \ge x_n$ となりますが、これは $x_n > x_{n+1}$ に矛盾します。

4. 十分性（$\Longleftarrow$）の証明：
X が降鎖条件 (DCC) を満たすと仮定します。C を任意の空でない既約閉集合（下方に有向な上方閉集合）とします。C の極小元全体の集合を M とします。DCC より、任意の $c \in C$ に対し、$c \ge m$ となる極小元 $m \in M$ が必ず存在するため、$C = \bigcup_{m \in M} \uparrow m$ と書けます。
ここで、C に相異なる2つの極小元 $m_1, m_2 \in M$ が存在したと仮定します。C は下方に有向なので、ある $c \in C$ が存在して $c \le m_1$ かつ $c \le m_2$ となります。しかし、m_1, m_2 は C の極小元であるため、$c = m_1 = m_2$ でなければならず、矛盾します。
したがって極小元はただ一つしか存在しません。それを x とおくと $C = \uparrow x = \overline{\{x\}}$ となります。よって空間は sober です。 ■

4.2 Scott位相 (Scott topology)

一般の有向完備半順序集合 (dcpo) において、Scott位相は必ずしも sober になるとは限りません。この事実は P. T. Johnstone による歴史的な反例 (1981) で示されました。しかし、空間に**連続性 (continuity)** という強い条件を課すことで、Scott位相は sober になります。

定義 4.3: 連続dcpo (continuous dcpo) と Scott位相

- **有向完備半順序集合 (dcpo)**: 半順序集合 X の任意の有向集合 (directed set) D が上限 $\sup D \in X$ を持つこと。
- **遠下関係 (way-below relation, $\ll$)**: $x, y \in X$ に対し、$x \ll y$ とは、任意の有向集合 D に対して $y \le \sup D \implies \exists d \in D,\ x \le d$ が成り立つこと。
- **連続dcpo (continuous dcpo)**: 任意の $x \in X$ に対し、集合 $\Downarrow x = \{y \in X \mid y \ll x\}$ が有向集合であり、かつ $x = \sup \Downarrow x$ が成り立つこと。
- **Scott位相**: $U \subseteq X$ が開集合であるとは、U が上方閉集合であり、かつ任意の有向集合 D について $\sup D \in U \implies D \cap U \neq \emptyset$ となること。（双対的に、Scott閉集合は下方閉集合であり、有向部分集合の上限で閉じている集合である）。

定理 4.4

連続有向完備半順序集合 (continuous dcpo) の Scott位相は sober空間である。

証明：

1. T_0 性の確認：
相異なる2点 $x \neq y \in X$ を取り、$x \not\leq y$ と仮定します。連続性より $x = \sup \Downarrow x$ です。もし $\Downarrow x \subseteq \downarrow y$ ならば $x \leq y$ となり矛盾するため、ある $z \ll x$ が存在して $z \not\leq y$ となります。
$\Uparrow z = \{w \in X \mid z \ll w\}$ は、連続dcpoの補間性質 ($z \ll w \implies \exists u, z \ll u \ll w$) により Scott開集合となります。$x \in \Uparrow z$ であり、もし $y \in \Uparrow z$ ならば $z \ll y \implies z \leq y$ となり矛盾するため $y \notin \Uparrow z$ です。
よって T_0 空間です。

2. 既約閉集合が生成点を持つこと：
$C \subseteq X$ を空でない任意の既約なScott閉集合とします。集合 $D = \{z \in X \mid \exists c \in C, z \ll c\}$ を定義します。
$z \ll c \implies z \leq c$ であり、C は下方閉集合なので $D \subseteq C$ です。
【D は有向集合である】: $z_1, z_2 \in D$ とすると、ある $c_1, c_2 \in C$ について $z_1 \ll c_1, z_2 \ll c_2$ です。これは $c_1 \in \Uparrow z_1, c_2 \in \Uparrow z_2$ を意味します。$\Uparrow z_1, \Uparrow z_2$ は開集合で C と交わるため、C の既約性より $(\Uparrow z_1 \cap \Uparrow z_2) \cap C \neq \emptyset$ です。この交わりの元を c_3 とすると $z_1 \ll c_3, z_2 \ll c_3$ です。$\Downarrow c_3$ は有向集合であり、$c_3 \in C$ より $\Downarrow c_3 \subseteq D$ なので、z_1, z_2 の共通の上界 $z_3 \in D$ が存在します。
【$C = \downarrow (\sup D)$ である】: $D \subseteq C$ であり、C はScott閉集合（有向集合の上限を含む）なので、$x = \sup D \in C$ です。C は下方閉集合なので $\downarrow x \subseteq C$ です。逆に、任意の $c \in C$ に対し、$c = \sup \Downarrow c$ です。$z \ll c$ ならば $z \in D$ なので $\Downarrow c \subseteq D$ となり、$c = \sup \Downarrow c \leq \sup D = x$ より $c \in \downarrow x$ となります。よって $C = \downarrow x$ です。
以上より、任意の既約閉集合 C は唯一の生成点 x を持ち、空間は sober です。■

参考文献

- Johnstone, P. T. (1981). *Scott is not always sober*. Continuous Lattices (Lecture Notes in Mathematics, vol 871). Springer, Berlin, Heidelberg.
  🔗 nLab: Scott topology (反例に関する言及を含む)
- Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press.
  （sober空間や sober化、超不連結空間に関する包括的な位相的議論）
- Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M., & Scott, D. S. (2003). *Continuous Lattices and Domains*. Cambridge University Press.
  （ドメイン理論、連続dcpo、Scott位相の sober 性に関する標準的テキスト）